

阿诺德 (V. I. Arnold) 访谈记

——采访人香港科技大学助理教授 S. H. Lui,

采访时间：1995-11

(原文载于 www.ams.org/notices April 1997 "An Interview with Vladimir Arnold", 译稿来源：网络)

荐读短言

阿诺德是当代伟大的数学家，苏联解体后，前往西方，先后在法国和美国旅居。作为这样一位具有特殊学术地位，特殊地缘经历的学者，阿诺德在采访中，回忆了前苏联数学的发展情况，并有评价，还对俄罗斯学术文化与西方的差异进行了对比，颇具阅读价值。尤其在当前的背景之下，我国对于“从 0 到 1”的创新具有很大的期待，因此，采访里的这些内容更值得我们在研读的基础上，认真对比和思考，从中提取相应的经验和教训。

阿诺德不仅天赋极高，而且具有强烈的民族自豪感；不仅数学科研成就高光辉煌，而且培养的学生也是星座在天。联系到“钱学森之问”，这些或许可以有助于寻求到一些答案。

除此之外，我们还推荐阅读欧亚系统科学研究会“研究文库”中的 2014 年出版的《Arnold: Swimming Against the Tide》一书。书中分两大部分，一是阿诺德自己的论述，二是朋友和学生的回忆文章，都很精彩。

『Lui』：能讲一下在莫斯科大学(Moscow State University)学习时的情形吗？你能谈谈那些教授吗，如彼特洛夫斯基(Petrovski)、柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)、庞特里亚金(Pontriagin)、洛克林(Rokhlin)...？

『阿诺德』：在“莫斯科数学的黄金年代”¹一书中，对五十年代的 Mechmat(莫斯科大学数学力学系)有详尽的记载，我当时是在校学生。这本书里有关于很多数学家的纪念文章，我写的一篇是回忆柯尔莫哥洛夫的，他是我的导师。这么多的大数学家云集在同一个系里是很罕见的，当时我在系里念书，这种盛况我再也没有在其他地方见到。你想，柯尔莫哥洛夫、葛放(Gelfand，现在 Rutgers，大师级人物)、彼特洛夫斯基、庞特里亚金、诺维科夫(P. Novikov)、马尔科夫(随机过程的 Markov Chain 以他命名)、Gelfond, Lusternik, Khinchin 和亚历山德罗夫(P. S. Alexandrov)在讲台上，下面听课的学生中有 Manin、Sinai、诺维科夫(S. Novikov)、阿列克谢耶夫(V. M. Alexeev)、安诺索夫(Anosov)、A. Kirillov 和我。

这些大数学家们风格迥异！象柯尔莫哥洛夫，你几乎没法在他的课上听懂，但是他讲课时妙见层出不穷，令人受益极深。<有省略...>柯尔莫哥洛夫对现在称为汉密尔顿系统的 KAM 理论的研究始于他发给二年级本科生一份规定作业。其中一个问题是关于非退化全可积系统的研究(如一个质点沿一个置于水平的圆环曲面的环绕运动)。那个时候可没有计算机用！他注意到这些经典范例中的运动是准周期性的，他又试着找一些更复杂运动的例子(如“混合流”或用今天的话讲“混沌”)。

¹ 书名是“Golden Years of Moscow Mathematics”。西方往往将俄罗斯和苏联都称为“Russia”，在中文中则因年代不同，翻成前苏联、独联体和俄罗斯。有些人名和术语我不知道中文的名称，Sommerfeld 是位大物理学家，fewnomial 和 realP-NP 我不懂，Institut des Hautes Etudes Scientifiques 和 Universite de Paris-Dauphine 肯定是法国的两所著名大学。

这个问题他没找到解，这个难题至今仍无人解决--还没有人能找到在普遍摄动系统下，载有混合流的不变环。但是这个研究过程中的意外收获却比原来的混合流问题重要得多。这包括持续非共振环(Persistent nonresonant tori)的发现，加速收敛方法和相关的函数空间隐函数定理，大多数汉密尔顿系统中运动稳定性的证明(如螺旋运动和平面轨迹)，以及 Tokamak 几何中磁曲面存在性的证明，该结果可应用于可控热核聚变的限制等离子体的研究。

研究中得到的一系列成果比原始问题更重要是一种普遍现象。哥伦布最初只是想找一条去印度的新路，结果意外的收获是他发现了新大陆。

我在 Mechmat 念书时庞特里亚金已经身体很差了，但他大概是课讲得最好的。他刚从拓扑学转向控制论，他的个性也大变。后来在收入“俄罗斯数学调查”期刊(Russian Mathematical Surveys)的自传中，他解释了他转向应用数学和反犹太观(Antisemitic)的原因。当他向编委交稿时，克格勃代表建议不要按原文出版，怕观点太极端了。我倒很想看到他的自传以原文出版，现在你找到的都是加工润色过的了。有人说他的反犹太观念可能仅仅出于他害怕自己有一部份犹太血统而怕万一被人发现。

当然庞特里亚金也不是一直这样的。他最好的学生 V. A. 洛克林(Rokhlin)在二战中受伤被德军俘虏，后来美军解放了战俘营，那时二战还未结束，洛克林回到苏联军队继续参加战斗。有一次他押送一名德国军官去上级机关，他遇到一个喝醉的克格勃特工，那个克格勃要把德国军官就地枪决，他坚决反对。所幸他的上级帮了他忙[注：大概克格勃是惹不起的吧]，把他调到另外一支部队去了。但最终

洛克林和其他由盟军从德国战俘营解放出来的苏军士兵一样，都被送到苏联北部的 Gulag(劳改营)。

几个月后，一个劳改营里放出来的人到莫斯科告诉庞特里亚金说洛克林还活着但已饿得奄奄一息。庞特里亚金在柯尔莫哥洛夫、亚历山德罗夫和其他数学家的帮助下，写信给克格勃头子贝利亚，要求立即释放洛克林，因为洛克林是他那代人中最有天赋的数学家。贝利亚发了道命令释放了洛克林，当局发给洛克林冲锋枪让他继续当兵，他在劳改营里从劳改犯变成当警卫。庞特里亚金和其他数学家再次给贝利亚写信，终于洛克林得以回到莫斯科。但洛克林从劳改营回来后没有莫斯科的“propiska”(“propiska”是俄语，意即在某个特定地区居住的权利，在苏联，居民不能随便迁居他地，每个人都必须要有“propiska”!) ²

庞特里亚金当时已经全盲了，有权在莫斯科 Steklov 研究院雇一个秘书。他极为勇敢地把这个位子给了洛克林，洛克林后来成了苏联在拓扑学和动力系统领域的顶尖数学家之一。洛克林对低他一辈的数学家有很大的影响(如 S. 诺维科夫、Sinai、安诺索夫和我)并其后在圣彼得堡创建了非常重要的数学研究所。他带过的学生有 Vershik, Gromov, Eliashberg, Viro, Shustin, Turaev 和 Kharlamov。60 年代他在莫斯科举办学术讲座时我见过他，他当时从离莫斯科一百多公里远的户口所在地赶来。

洛克林是犹太裔，他在德国战俘营假装自己是穆斯林而得以幸存。他出生于阿塞

² 这一定是“户口”了，西方人没领教过，所以原文加了解释，我们一看就知道。遗憾的是，直至今日，在中国，每个人仍然要有户口。

拜疆的巴库。对庞特里亚金来说, 为帮助洛克林而去找贝利亚是冒了极大风险的。

即使在庞特里亚金成了反犹太人的积极分子以后, 他对洛克林评价依旧很高。

我和庞特里亚金的私交很好。他邀请我去他家做客、参加他的学术讲座, 他对我的研究, 特别是奇点理论(Singularity Theory)很感兴趣。部份原因是我们都对微分拓扑、控制论和博弈论有共同的兴趣, 还有一个重要的原因, 他想在国际会议上指摘我的不是。庞特里亚金是当时苏联在国际数学会(IMU: International Mathematical Union)的代表, 他极力阻挠国际数学会选举任何苏联的不同政见学者(我在黑名单上, 因为我和其他 99 位数学家联合签名写信, 抗议当局把健康的数学家送进精神病院, 这也是当局清除异议分子的一贯手段)。国际数学会一向很“政治化”, 所以他一直能得逞。在他的回忆录中, 他提及国际数学会中很有一些人和他一样爱整人, 我真希望我能知道这帮人的名字。实在巧合的是, 我现在正担任他当年的职位, 是俄罗斯在国际数学会的代表。

彼特洛夫斯基当时是校长, 他常在学术讲座前与洛克林在电梯里邂逅。我觉得他被人看见和洛克林在一起是挺危险的。彼特洛夫斯基当时已淡出学术, 但是他在对莫斯科数学界是极为重要的, 他总是为了支持真正的数学家们而与共产党官僚们进行艰难的抗争。<有省略...>

彼特洛夫斯基在实代数几何(与希尔伯特第 16 问题相关)的成果(1933 和 1938)开创了现代数学的一个重要分支--实代数变体的拓扑学。他的理论成果(例如, 以方程的阶数来表示 Betti 数的估计)应用于在很多其他分支包括复杂性理论。例如 Khovanskii 用之于 fewnomial 理论, 斯迈尔(Smale)运用在“real P-NP”问题上等

等。在西方学术界，这些结果通常属于托姆(Thom)和米尔诺(Milnor)(1965)，而彼特洛夫斯基和他的学生 Oleinik 发表于 40 年代的论文则给出了一个更好的估计³。这种现象后来也见怪不怪了，忽略引用俄罗斯的基本结论的论文对现代社会的求职者来说简直太容易了⁴。

大多数共产党员都不知道，彼特洛夫斯基从来都不是党员。他影响力很大，部份原因是他和以前的学生私交很好，他的不少学生毕业后逐渐在苏联的官僚系统里身居高位。彼特洛夫斯基还被选为最高苏维埃主席团成员。一天他去党中央委员会大楼开会，会上他为了支持基础科学研究而与官僚当局激烈争吵，临走时他心脏病发作倒在大楼门口。他弥留人间的最后一句话是：“我赢了”。

在彼特洛夫斯基去世后，共产党和克格勃费了 20 年的力气来摧毁他在 Mechmat 建立的数学中心。当局停止聘用优秀的人才担任教职，到今天他们也差不多终于毁掉了这个中心⁵。

『Lui』：能谈一下你怎么教本科生和带研究生的吗，你有多少学生在俄罗斯和在法国？

『阿诺德』：在我名下通过论文答辩的博士有 40 个左右。我没有准确的数目，原因有好几个。在“压抑”的年代，学校不准我在莫斯科大学带留学生因为我不是

³ 要指出的是，托姆和米尔诺引用了这篇文章

⁴ 意指一些西方学者剽窃不广为人知的俄罗斯论文结果以求名利

⁵ 三年前我曾碰到一个在普林斯顿学天体物理的俄罗斯留学生，他本科毕业于莫斯科大学，他对我说 20 年后 “There will be no science in Russia.” 数年过去了，俄罗斯的情况依旧堪忧，人才流失更为严重，不过我们中国也好不了多少。前苏联模式的一大恶果是：有真才实学者受到打击排挤，一些不学无术的党政工团干部把持行政甚至学术高位，这仍是我们国内多数学术院校的现状。关于俄罗斯数学的前景，阿诺德另有一篇文章 “Will Russian mathematics survive?” (Notices 40:2 1993, 网上没有这期)

党员。留学生跟我作研究，但名义上的导师是一些友好的党员，他们还因此拿津贴。有些研究生有自己的导师，但他们作的论文是在我的学术讲座上讨论的课题，因此实际上成了我的学生，比如 S. M. Gusein-Zade, Yu. Illiashenko 和 A. I. Neistadt。现在我在莫斯科有两个本科生和三个研究生，在巴黎有四个研究生。有还有两三个从一月份开始。

我从学生那里学到很多东西，特别是本科生⁶。我从来不给学生指定课题，那简直象包办婚姻一样。我只是告诉他们那些是已解决的那些还是未知的。我在莫斯科的学术讲座大约有三十位数学家参加，多数是我以前的研究生，但也一直有其他人，即使我在国外讲座也照常举行。这个讲座延续了大概 30 年了，不同时代的参加者有 Ya. Sinai, 阿列克谢耶夫, 诺维科夫(S. Novikov), M. Kontsevich, A. Goncharov, D. B. Fuchs, G. Tjurina, A. Tjurin 等。

在莫斯科生活是很艰难的，多数学生除了作研究外还不得不想办法挣钱谋生。有的自己开公司作生意。莫斯科犯罪率很高。自己开公司作生意还有性命之虞。我在莫斯科的一个学生刚刚作完论文但还没来得及答辩，几周前失踪了。我们深为他的生死担忧⁷。

『Lui』：你有崇拜的数学人物吗？

『阿诺德』：我想是巴鲁(Barrow)、牛顿(他却是一个并不可爱的人物，见我写的

⁶ 是自谦还是那本科生像他当年一样厉害？

⁷ 91 年在苏联 8.19 未遂政变不久，我在火车上遇见一位总参部军官，他带队去基层锻炼。聊天中得知他来自东北，考进北京二外后被派到莫斯科大学留学 5 年，俄语专业毕业。听他聊起大多数俄罗斯人都受过高等教育，普遍素质很高，国力比中国还是强很多，只要国家走上正路，发展应该很快。可是十多年了，俄罗斯还是搞得一团糟。

“惠更斯与巴谟，牛顿与胡克(Hooke)”，1990 Birkhauser 出版)、黎曼、庞加莱、明科夫斯基、维尔(Weyl)、柯尔莫哥洛夫、惠特尼、托姆、斯迈尔和米尔诺。有一半的数学家是我从克莱因(F. Klein)的“19 世纪数学发展讲义”(“Lectures on the Development of Mathematics in the 19th Century”)一书中看来的。我从许多数学家那里学到很多，比如葛放、洛克林、诺维科夫、P. Delingne 和 Fuchs，以及从我的学生那里，比如 Khovanskii, Nekhoroshev, Varchenko, Zakaljukin, Vassiliev, Givental, Goryunov, O. Scherbak, Chekanov 和 Kazarian.

我要深深地感谢托姆，我直到 1965 年都经常参加他在 Institut des Hautes Etudes Scientifiques 举办的奇点理论学术讲座，这个讲座深刻地改变了我的数学观。托姆讨论数学的方式始终是赏心悦目的，他从来都用明显没有严格逻辑意义的句子。我当时一直不能把自己从逻辑的枷锁中解放出来。我当时梦想着没有实在意义的不可靠的数学推想，我一直被这个梦毒害。“一个人总能找到些蠢伙去证明定理”，这句话，托姆的学生说，是他的信条。

1961 年米尔诺在列宁格勒关于球体的微分结构的学术演讲给我的导师柯尔莫哥洛夫留下了极深的印象。他因而建议我把它排入我的研究生的讲课提纲中。这逼得我向诺维科夫、Fuchs 和洛克林去学习微分拓扑。这个时机倒巧了，一年后，我是诺维科夫关于球体的微分结构的论文答辩委员会委员。

1961 年斯迈尔来莫斯科访问，他是我遇到的第一位外国数学家。他对俄罗斯关于动力系统研究的影响以及对我个人的影响都是极大的。

『Lui』：你注意到来自不同文化的数学家作数学研究的不同之处吗？

『阿诺德』：多年来我没有意识到这些差异，但差异确实存在。几年前我参加了在华盛顿召开的国际科学基金会(ISF: International Science Foundation)会议，这个组织向俄罗斯科学家提供资金。一位美国与会者建议应支持一些俄罗斯数学家因为他们是“以美式风格作研究”。我大惑不解地问他为什么。“Well,”这位美国人说，“这是指(数学家)四处旅行，在各个学术会议上宣讲他的最新结果并且让这一领域的专家们都知道他。”我的意见是 ISF 更应该支持那些以俄罗斯风格作研究的数学家，这种风格是坐在家里刻苦研究，寻求基本定理的证明，这些定理将是数学永恒的里程碑！

俄罗斯的工资(过去、现在)太低了，所以一个人去研究数学就意味着他把数学当成一种目标而不是挣钱的手段。在西方数学界，至今还是可以靠重写(或用现代术语改写)不为西方熟悉的俄罗斯克格勃数学著作或观点而获取名利。

俄罗斯人对知识、科学和数学的态度一直保持着俄语“Intelligentsiya”的古老传统。这个词是其他语言中没有的，因为没有其他国家有一个类似的由学者、医生、艺术家、教师等组成的阶层，他们永远把为社会作贡献为先，个人名利在后。[注：我们古文中也有“先天下之忧而忧，后天下之乐而乐”这样的诗文]

我的好友 Vershik 最近去美国驻巴黎大使馆办签证。签证官问：“你在圣彼得堡的薪水是多少？”听到他说的真实数字后，签证官又问，“你觉得，拿这点薪水，你

能说服我们会回圣彼得堡吗？”Vershik 答到：“当然，钱又算什么！”⁸签证官大为震惊，Vershik 随即拿到了签证。

我正好在一周前申请签证，他们要我等上长达三周。原因是我的论文要在华盛顿审查因为我被当成“驴子”。我问为什么，“Well”，他们答道，“我们给各种犯罪起了名字：猫、狗、老虎、骆驼等等。”他们还给我看那名单，“驴子”是对俄罗斯科学家的别称。

俄罗斯数学传统的另一特点是倾向于全面地把数学看成一个充满活力的有机体。西方学界有可能一个人只是数学上某一方面的专家，而对相邻分支一无所知。一个学者涉猎较广在西方学界被看成一大缺点，而恰恰在俄罗斯一个学者研究领域太窄被看成同样程度的不足。

法国数学几个世纪以来一直是很辉煌的，可惜深邃的研究到 Leray, 亨利·卡丹 (H.Cartan, 陈省身教授 30 年代曾在卡丹指导下从师微分几何研究), Serre, Thom 和 Cerf 为止。布尔巴基学派(Bourbakists)声称所有伟大的数学家，用狄利克莱 (Dirichlet)的话来讲，是“用清晰的观点代替盲目的计算”。布尔巴基宣言中有这句话，翻译成俄语变成了“用盲目的计算代替清晰的观点”。译审柯尔莫哥洛夫精通法语，我发现了这一错误后大吃一惊，去找柯尔莫哥洛夫讨论，他答道：我不觉得翻译有什么错，翻译把布尔巴基风格描述得比他们自己说的更准确。遗憾的是，庞加莱(Poincare)没在法国留下学校。

⁸ 原文为“Of course, Money is not all!”

法国学术界狭隘观念的一个典型例子是法国国家科学院的最近一场讨论。

Gromov 多年来是外籍院士，但他最近加入了法国国籍因此不再是外籍院士。问题是要把他转成一般的院士。法国数学家们却对此反对，说“这些位置是给真正法国人的！”。

按我的看法，所有的“真正法国人”候选院士和 Gromov 相比，根本不是同一个档次的，Gromov 是世界顶尖数学家之一。最后，Gromov 还是没当上院士⁹。

因为布尔巴基学派对学生公式化的训练，所以在法国教学很困难。比如，在 Paris-Dauphine 一次四年级学生的动力系统书面考试中，一个题目是给定初始点，当时间趋于无穷时，求一汉密尔顿方程系统在相平面解的极限。思路是把初始点选在一鞍点的分离线[注：separatrix]，极限就是鞍点。准备考题时，我犯了一个计算错误，相曲线(含初始点的能量级曲线)变成了一个闭合椭圆而不是一条分离线。学生们解出相曲线为闭合椭圆，因而得出结论：存在有限的时间，系统解返回到初始点。运用 unicity 定理，他们继而得出对任何整数 n ，系统解的值在 nT 时间后仍为初始点。由此得出结论：因为时间趋于无穷大的极限与时间趋于无穷大时任意子序列的极限相等，所以极限值为初始点。这个答案是坐在考试大厅里不同位置的几个好学生各自独立解出来的。从逻辑推算上，答案无懈可击。这是一个正确的推算，也能用计算机算出相同结果。但显然，解题者根本什么都不懂。可以想象布尔巴基学派对学生的压力之大有多么的可怕，以至于把显然并不笨的学

⁹ 看来在法国，院士也有绿卡、公民之区别：)。看来布尔巴基派传人的气度也比希尔伯特差得太远了(法国人的性格不应该这么狭隘的?)。30 年代希尔伯特想聘女代数学家诺特(Noether)为哥廷根教授，遭到保守派的攻击，说如果德国的军人来到哥廷根念书，教他们课的是个女老师，我们的战士会怎么想? Hilbert, annoyed by the question, replied, "Sir, the classroom is not a bathhouse."

生变成了推算机器！这种公式化的教育对实际问题是毫无用处的甚至是危险的，会导致切尔诺贝利那样的灾难¹⁰。糟糕的是，这种公式化的教育正在很多国家蔓延，受其影响下的数学前景不容乐观¹¹。

美国则面临另一种危险。没有一个俄罗斯教授能答对 GRE 中的题目：在以下各对中选择一个最接近(angle, degree)的答案：

A) (time, hour) B) (area, square inch) C) (milk, quart)

每一个美国人都能答对，标准答案是这样解释的：degree 是角度的最小单位。squareinch 是面积的最小单位，而小时下有分和秒，1quart = 2pints。我一直很奇怪怎么可能会有这么多的美国人克服了如此的困难而成为大数学家的。纽约的一位物理学家说他了解这些出题者的愚蠢程度因此他能答对这题。

H. 惠特尼曾告诉我，在一次对 14 岁的美国学生的全国测验中，对 80 的 120% 是大于、小于还是等于 80 这个问题答对的只有 30%。搞测验的人认为这表明有 30% 的学生懂百分比。惠特尼向我解释说，考虑到总体样本，真正掌握百分比的人数其实是可怜到可以忽略不计的。因为有三种可能的答案，猜对的统计预测是 33%，加上 5% 的误差¹²。

¹⁰ 据有讽刺意味的是切尔诺贝利核事故发生在前苏联(乌克兰,那时还属于独联体?),而不是在西方国家。

¹¹ 公式化教育在中国也愈演愈烈,令人担忧。我们能杀出重围到北美留学,算是幸运者。当年的题海战术似乎没有今天这么惨烈。加上“propiska”——“户口”的因素,更是不公平。我毕业于上海交大,前几天国内的小侄女在电话里说:“我们省的本科线在上海都能上交大了!”她现在上高二,每天学习超过 14 个小时。

¹² 美国的教育不致于这么惨吧!美国的教育系统,不同的学区差异极大。各位大多在北美,应该了解实际情况。我住的 Town 高中很好,周围邻居的小孩好几位是律师和医生,不过美国的优等生学理工科的人数估计在逐年下降。

最近，美国国家科学院决定美国的科学教育一定要提高。他们建议把现有课程中难度过高的一些不必要的部份删掉，代之以确确实实根本的、基础的知识，比如所有的物体都有属性，所有的生命都有天性！（见 Nature 372: 5606 1994 年 12 月 8 日）无庸置疑，他们还会做得更过头！两年前，我在“今日美国”报上读到美国父母为孩子在每个年龄段开列了必须掌握的知识的項目。10 岁时他们要知道水有两种状态，15 岁时了解月亮有不同的相位、月亮绕地球转。在俄罗斯我们在幼儿园就教水有三态[注：原文为 primary shcool，有时亦可指 Kindergarten，我相信阿诺德在这里指幼儿园]，但是新兴的美式文化无疑会在短期内取胜。不过美国的自由系统的一大优越性是一个高中学生可以学，比方说，爵士乐历史而不用学代数。

在惠特尼去世前几个月，他在普林斯顿高等研究院，依然在学术上很活跃。他告诉我他学数学的故事。他在耶鲁大学上本科时主修小提琴，两年后他被选送到欧洲最好的音乐中心学习。可惜我忘了是哪个城市，肯定离阿尔卑斯山不远，因为他还是个登山家。在那里，一个学生一定要修一门不同的专业并通过考试。惠特尼问他的同学哪个专业比较热门，答曰“量子力学”。于是在他的第一节量子力学课后，他这么问那位著名的授课老师（玻里？薛定谔或是 Sommerfeld？）“亲爱的教授先生，好像你讲的课有点不对劲儿，我是耶鲁的优等生，可你的课我还是一个字也听不懂。”

讲课老师听惠特尼说他是音乐专业的，礼貌地回答说：“那是你需要些背景知识，如微积分和线性代数。”惠特尼说：“那好，我希望这两门课没你的课那么先进，应该有人写过一些教科书吧。”讲课老师指点了几本教材名称给惠特尼。（请知情

者告我此事发生的地点，这位教授的名号，以及这几本书的名字，先此致谢！）
惠特尼对我说：“三个星期后，我能听懂他的课了，学期末我把专业从音乐转到数学。”

柯尔莫哥洛夫起初也不是学数学，他学的是历史。他 17 岁时作出第一篇论文，在莫斯科大学 Bakhrushin 的学术讲座上宣讲。柯尔莫哥洛夫基于中世纪 Novgorod 的税收记录分析得出一些结论。讲完后柯尔莫哥洛夫问 Bakhrushin 是否同意他的结论。“年轻人，”教授说，“在历史学，你至少需要五个证明才能得出任何结论。”第二天，柯尔莫哥洛夫就转到了数学系。在他去世后，这篇论文从档案中被找出来出版，历史学家认为他的结论是对的。

『Lui』：能谈一下关于纯数学和应用数学的看法吗？

『阿诺德』按 Louis Pasteur 的观点，根本不存在应用科学，确切地讲存在的是科学的应用实例。纯数学家和理论物理学家常常认为应用数学家是没有能力取得重要科学成就的思维弱者或是对钱比数学更感兴趣的人。我认为绝对不能这么看待应用数学界。见我的文章“应用数学的歉意”(“Apology of applied mathematics” in “Russian Mathematical Surveys”, 1996)。该文总结了我在 1995 年 7 月在汉堡国际工业与应用数学会的开幕式上的演讲。我认为两者主要是社会性的，而非科学性的区别。纯数学家的职业是寻求数学的新发现，应用数学家的职业是解决实际问题。

当哥伦布扬帆启程时，他象一个应用数学家，去解决一个具体难题：找一条去印度的路。新大陆的发现可以比作为纯数学家的贡献。我不认为迦利略(他立即以美式的商业化风格利用其成果)不如，比方说，纯粹的思想家帕斯卡。真正的危险不在于应用数学本身，而在于由公式化的数学和数学教育(这简直是罪行)引起的纯数学和应用数学的分家。公理推理的希尔伯特-布尔巴基风格对数学的阐释在 20 世纪前 50 年占主导地位，幸运的是现在让位于庞加莱风格几何数学的统一潮流，这种风格才能把深刻的理论内涵与实际世界的应用问题结合起来。[8]

另一方面，最近我读的一本美国书中说，几何是一种不会在冗长计算中犯错误的艺术，我认为这绝对是对几何的低估。人脑有两个半球：一个负责多项式的计算和语言；另一个负责空间图形的方向及所有实际世界中的事情。数学则是当你真正发挥两个半球作用时的几何，见“The geometry of formulae” by Khovanskii “Soviet Sci. Rev. Sect. C: Math. Phys. Rev.”v4 (1984)。